L'attraction de la couche sphèrique et le monde quadridimensional.

Par **D. Mordoukhay-Boltovskoy** (Rostow D.).

§ 1. Cette note donne la solution du problème sur l'attraction du point matériel par une couche sphérique.

Elle trouve la loi de la force centrale pour laquelle l'action sur le point entérieur est nul et sur le point extérieur est telle comme si la masse de la couche etait toute entière condensée en son centre.

La méthode est différente de celle qu'on trouve dans la Mécanique Céleste de Laplace. Le problème est discuté dans l'espace euclidien de m dimensions.

Cette généralisation du problème de Laplace peut avoir quelque valeur pour l'examination de la possibilité de l'insertion du monde tridimensional, comme un élement dans un monde euclidien de dimension supérieur. Les résultats obtenus montrent l'impossibilité d'établir quelques analogies les plus naturelles dans le monde quadridimensional, qui embrasse le monde tridimensional.

La couche hypersphérique (et aussi la hypersphère) dans l'espace quadridimensional n'attire le point comme si toute la masse était condensée bans le centre, que dans le cas de la force centrale qui agit en raison inverse du cube de la distance, c'est à dire différent de la force newtonienne.

§ 2. Cherchons *la loi suivant laquelle doit agir la force centrale ne dependante qui de la distance dans l'espace euclidien de m dimensions, pour que la couche hipersphérique n'exerce aucune action sur le point intérieur?*

Par hypersphère de m dimensions je comprends le lieu géométrique dans l'espace de m dimensions des point également distants du point déterminé (centre).

Si le centre est dans O (origine de coordonnées), l'équation de la hypersphère est la suivante:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots x_m^2 = r^2. \tag{1}$$

La hypervolume de la hypersphère Ω_m s'exprime par l'intégrale de Dirichlet:

$$2^m \int dx_1\, dx_2 \dots dx_m,$$

qui s'étend à l'étendue

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots x_m^2 < r^2,$$
$$x_j > 0,$$

et dont la valeur est la suivante:

$$V_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} r^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}. \tag{2}$$

Nous obtenos dans l'espace de m dimensions la couche hypersphérique infiniment mince, en prenant sur les rayons dirigés aux points de la hypersphère des segments infiniment petits dr.

Mécanique Celeste, t. II, ch. II.

Juillien. Problèmes de Mécanique rationelle. Paris, 18?7. T. I, p. 57—?2.

Si r est le rayon de la couche, nous avons pour la hypervolume de la couche ω_m

$$\omega_m = dV_m = \frac{dV_m}{dr} dr = \frac{m\pi^{\frac{m}{2}} r^{m-1} dr}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}.$$

Pour hypersurface de la hypersphère $\overline{\Omega}_m$ nous avons

$$S_{\overline{m}} = \frac{\omega_m}{dr} = \frac{dV_m}{dr} = \frac{m\pi^{\frac{m}{2}} r^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}. \tag{3}$$

En désignant par φ l'angle, que la droite Mm menée de M à un élement infiniment petit de m de la couche fait avec MO et en remarquant que toutes les composantes perpendiculaires à MO doivent s'anéantir en vertu de la symmétrie de la hypersphère par rapport à MO, nous obtenons que la résultante est dirigée sur OM et s'exprime par la formule suivante:

$$P\,dr = \delta \int_0^\pi k^2 S_{m-1} f(r) \cos \varphi r\, d\theta, \tag{3}$$

ou

$$P\,dr = -\delta \frac{(m-1)\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} k^2 r^{m-1} dr \int_0^\pi f(u) \sin^{m-2}\theta \cos d\theta, \tag{4}$$

$-k^2 f(u)$ étant la force qui agit sur unité de la masse r — rayon de la hypersphère.

En effet, à un système des valeurs (θ, φ) correspond la couche hypersphérique $\omega_{m-1}^{(m)}$ de $m-1$ dimensions dans le hyperplan perpendiculair à OM qui forme la base du hypercône aves le sommet dans le centre 0.

Cette couche représente aussi la base de l'anneau $\overline{Am}$ de m dimensions de l'épaisseur dr. Pour déterminer la hypervolume de $\overline{Am}$, il faut multiplier la hypersurface $S_{(m-1)}^{m}$ de la couche $\omega_{(m-1)}^{m}$ de $m-1$ dimensions sur Ω_m par son épaisseur dr, que l'on mésure perpendiculairement à deux hypersphères Ω_{m-1} qui limitent $\omega_{m-1}^{(m)}$.

On obtient $S_{m-1}^{(m)}$ en rassemblant les élements infiniment petits avec les bases égales à la hypersurface de $\Omega_{m-1} - S_{m-1}$ et l'épaisseur $rd\theta$.

Le hypervolume de A_m

$$v_{m-1} = S_{m-1}^{(m)}\, dr = S_{m-1}\, r\, d\theta\, dr.$$

En vertu de la formule (3)

$$S_{m-1} = \frac{\partial v_{m-1}}{\partial \rho} = \frac{(m-1)\pi^{\frac{m-1}{2}} \rho^{m-2}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}$$

Enfin $\rho = r \sin \theta$, parce que ρ est la projection de r sur le hyperplan de Ω_{m-1}.

En posant $Mm = u$, $Om = r$, $OM = c$ on obtient de $\triangle\, OmM$:

$$\frac{u}{r} = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}, \quad \frac{c}{r} = \frac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin \varphi},$$

$$\text{d' où } \operatorname{ctg} \varphi = \frac{c - r\cos\theta}{r \sin \theta},$$

$$\cos \varphi = \frac{c - r\cos\theta}{\sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\theta}},$$

$$u^2 = c^2 + r^2 - 2cr\cos\theta,$$

$$P\,dr = E\,dr\int_0^{\pi} \frac{f(\sqrt{c^2+r^2-2cr\cos\theta})\,(c - r\cos\theta)\,\sin^{m-2}\theta}{\sqrt{c^2+r^2-2\,cr\cos\theta}}\,d\theta,$$

en posant encore

$$x = \cos\theta,\ \sin\theta = (1-x^2)^{1/2},\ t = \frac{c}{z},$$

$$E = \frac{(m-1)\pi}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\,\delta k^{\frac{m-1}{2}}\,r^{m-1},$$

$$P\,dr = E\int_{-1}^{+1} \frac{f(r\sqrt{\Omega})\,(t-x)(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}}{\sqrt{\Omega}}\,dx,$$

$$\Omega = 1 + t^2 - 2tx.$$

En vertu de la condition du problème posé

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(r\sqrt{\Omega})\,(t-x)\,(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dx}{\sqrt{\Omega}} = 0 \qquad (5)$$

pour toutes les valeurs de $(r,\ c)$.

Pour la fonction $f\ (u)$ nous posons maintenant la restriction très naturelle que $f\ (u)$ est pour $u = 0$ *algébroïde.*

Sans doute toutes les opérations de Laplace supposent aussi quelques proprietés générales de $f\ (u)$.

Toutes les déductions subsistent aussi en cas des conditions qu'on doit supposer pour le développement de Laurent, c'est à dire, quand $f\ (u)$ est holomorphe dans l'anneau circulaire avec le centre en $u = 0$ et même, quand on enlève la monodromité en supposant que les contours fermés dans l'anneau ramènent $f\ (u)$ à un nombre fini des valeurs.

Nous avons

$$f(u) = \sum_{s=-\mu}^{j=-\infty} A_{\frac{j}{p}}\, u^{\frac{j}{p}} \qquad (6)$$

pour $|u| < u$, ou

$$f(u) = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} A_{\frac{j}{p}}\, u^{\frac{j}{p}}. \qquad (7)$$

En introduisant ces développements dans (5) nous obtenous identiquement par rapport à r

$$\sum B_{\frac{j}{p}}\, r^{\frac{j}{p}},$$

ou

$$B_{\frac{j}{p}} = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(t-x)\,(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dx}{(1+t^2-2tx)^{3/2}} = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{j}{p} = s - 1.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}}=X_0+X_1t+X_2t^2+\ldots.$$

où

$$X_0=1,\ x_1=X\ .\ x_2={}^3/_4\,x^2-{}^1/_2,\ X_3={}^5/_2\,x^3-{}^3/_2\,x,$$
$$X_4=\frac{5\cdot7}{2\cdot4}x^4-\frac{3\cdot5}{2\cdot4}2x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4},\ldots$$

sont des polynomes de Legendre et

$$\frac{1}{(1+t^2-2tx)^{3/2}}=X_0^s+sX_0^{s-1}X_1t+\left(sX_0^{s-1}X_2+\frac{s(s-1)}{1\cdot2}X_0^{s-2}X_1^2\right)t^2+\ldots,$$

$$\frac{t-x}{(1+t^2-2tx)^{3/2}}=-X^s{}_0\cdot x-(sX_0^{s-1}\cdot X_1\cdot x-X_0^s)\,t-$$
$$-\left[\left(sX_0^{s-1}X^2+\frac{s(s-1)}{1\cdot2}X_0^{s-2}X_1^2\right)\cdot x-sX_0^{s-1}X_1\right]t^2+\ldots=$$
$$=Y_0^{(s)}+Y_1^{(s)}\cdot t+Y_2^{(s)}\cdot t^2+\ldots,$$

l'égalité

$$\int_{-1}^{+1}Y_0^{(s)}(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}dx=0$$

est satisfaite identiquement, parce que $Y_0^{(s)}=x$ est impaire.

Nous avons encore

$$\int_{-1}^{+1}(-sx^2+1)(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}dx=-2s\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2\varphi\,sin^{m-2}\varphi d\varphi+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{m-2}\varphi d\varphi.$$

En profitant les formules

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2k}xdx=\frac{1\cdot3\ldots\overline{2k-1}}{2\cdot4\quad2k}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2k-1}xdx=\frac{2\cdot4\ldots2k}{1\cdot3\ldots(2k+1)},$$

nous obtenons la solution unique

$$s=m.$$

Dans le developpement

$$\frac{f(r\sqrt{\Omega})}{\sqrt{\Omega}}$$

nous n'avons qu'un seul terme

$$\frac{A_{-(s-1)}}{r^{s-1}(\sqrt{\Omega})^{s-1}}.$$

Donc

$$f(u)=\frac{A}{u^{m-1}},$$

c'est à dire que *la couche hypersphérique exerce une action* (sur chaque point intérieur et pour chaque rayon de la couche) *seulement pour la force inversement proportionnele à (m — 1)—ième puissance de la distance.*

§ 3. Voyons encore dans quels cas l'action sur le point extérieur se ramène à l'action de la masse de la couche condensée dans son centre?

En remarquant que $c > r$ nous *profitons* le développement

$$P\,dr = \varepsilon \int_{-1}^{+1} \frac{f(c\sqrt{1+t^2-2tx})\,(1-xt)\,(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}}{\sqrt{1+t^2-2tx}}\,dx.$$

par puissance $t = \frac{r}{c} < 1$

Selon la condition

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(c\sqrt{\Omega})\,(1-xt)\,(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}}{\sqrt{\Omega}}\,dx = 2f(c), \tag{11}$$

$$\Omega = 1 + t^2 - 2tx,$$

où $f(u)$ est définie par les développements (6) ou (7), d'où

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-xt)\,(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}}{\Omega^{s/2}}\,dx = k, \tag{12}$$

où k ne dèpend pas de t.

En remarquant que

$$\frac{1-xt}{\Omega^{s/2}} = Z_0^{(s)} + Z_1^{(s)}\,t + Z_2^{(s)}\,t^2 + \dots,$$

$$Z_0^{(s)} = X_0^{(s)},$$

$$Z_1^{(s)} = sX_0^{s-1}X_1 - xX_0^s,$$

$$Z_2^{(s)} = sX_0^{s-1}\,X_2 + \frac{s(s-1)}{1.2}X_0^{s-2}X_1^2 - sX_0^{s-1}X_1\,x,$$

. . . .

$$\int_{-1}^{+1} Z_1^{(s)}\,dx = 0, \text{ parce que } Z_1^{(s)} \text{ est impaire.}$$

*L'*équation
$$\int_{-1}^{+1} Z_2^{(s)}\,dx = \frac{s}{2}\left[s\int_{-1}^{+1} x^2(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dx - \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dx\right] =$$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{s}{m} - 1\right] = 0 \tag{13}$$

nous donne *deux* solutions

$$s = 0 \text{ et } s = m,$$

d'où on obtien

$$f(u) = Au + \frac{B}{u^{m-1}}. \tag{14}$$

En introduisant la restriction naturelle que pour $u = \infty$ la force est nulle, nous parvenons au résultat suivant:

La force agit en raison inverse au $(m = 1)$ — ième puissance de la aistance:

$$f(u) = \frac{B}{u^{m-1}}. \tag{4'}$$

§ 4. Il est intéressant d'étudier le mouvement de la planète sous l'action de la force newtonienne dans l'hypotése que la planète représente la section d'une hypersphère (hyperplanète) de 4 dimensions par le hyperplan.

Nons avons alors:

$$P\,dr = \frac{-k^2\bar{\delta}}{c^2}r^3\;h\int_{-1}^{+1}\frac{(1-xt)\,(1-x^2)^{1/2}}{\Omega^{3/2}}\,dx, \tag{15}$$

$$h = 4\pi dr,$$

$$\frac{1-xt}{\Omega^{3/2}} = 1 + 2xt + {}^3/_2\,(3x^2-1)\,t^2 + \dots$$

et jusqu'à t^2:

$$P = \frac{-2k^2\pi^2}{c^2}\bar{\delta}\,(1 - {}^3/_8\, t^2), \tag{16}$$

$$t = \frac{r}{c}.$$

L'attraction du point par la sphère $\bar{\omega}_m$ du rayon ρ s'exprime de la manière suivante:

$$F = \int_0^\rho P dr = -\frac{2k^2\pi^2}{c^2}\bar{\delta}\int_0^\rho (1 - {}^3/_8\, t^2)\, r^3\, dr = -\frac{2k^2\pi^2}{c^2}\bar{\delta}\left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{16c^2}\right],$$

$$F = -\frac{mk^2}{c^2}\left[1 - \frac{1}{4}\frac{\rho^2}{c^2}\right], \tag{17}$$

$$\bar{m} = V_4\,\delta = \frac{\pi^2\rho^4}{2}\bar{\delta}$$

étant hypermasse de la hyperplanète.

En prenant deux hypersphères $\bar{\omega}_m$, $\bar{\Omega}_m$ des rayons ρ et R, remarquons que la résultante de l'action de la hypersphère $\bar{\omega}_m$ sur un lément de la counche sphérique Ω_m passe par le centre de Ω_m et est égalle à

$$\frac{-k^2\, m d\bar{M}}{u^2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\rho^2}{u^2}\right),$$

u étant la distance de $d\bar{M}$ du centre de $\bar{\omega}_m$. Pour la résultante entière de l'attraction de la couche Ω_m et $\bar{\omega}_m$ nous avons l'expression suivante:

$$\mathrm{T}dr = -\frac{\bar{m}}{c^2}k^2\bar{\triangle}\, r^3\, h\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x)\,(1-x^2)^{3/2}}{\Omega^{3/2}}\left(1 - \frac{\rho^2}{4c^2\Omega}\right)dx,$$

$\bar{\triangle}$ étant *hyperdensité*, $h = 2\pi$, r rayon de la couche:

$$\mathrm{T} = -\frac{4k^2\,\bar{m}\,\bar{M}}{c^2R^4}\left(1 - \frac{3}{8}\frac{r^2}{c^2}\right)r^3 + \frac{k^2\bar{M}\bar{m}}{c^4R^4}\,\rho^2 r^3\int_{-1}^{+1}\frac{(1-xt)\,(1-x^2)^{1/2}}{\Omega^{5/2}}dx. \tag{18}$$

On obtient après quelques calculs pour l'intégrale dans la partte droite de (18) la valeur suivante:

$$I = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{65}{8}t^2\right),$$

$$t = \frac{R}{C}.$$

L'action entière de hypersphère $\bar{\Omega}_m$ sur $\bar{\omega}_m$ est exprimée par l'intégrale

$$U = \int_0^R \mathrm{T}dr = -\frac{k^2\bar{M}\bar{m}}{c^2} + {}^1/_4\frac{k^2\,\bar{m}\bar{M}(\rho^2+R^2)}{c^4}$$

$$+\frac{k^2\,\bar{m}\,\bar{M}}{c^6}\cdot\frac{65}{48}R^2\rho^2.$$

En remarquant que l'accélération du hypersoleil est $-\frac{m}{c^2}k^2$,

hyperlanète $-\frac{M}{c^2}k^2$,

nous avons (en changeant c par r) les équations de mouvement par rapport au soleil:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\frac{(\bar{M}+\bar{m})}{r^3}xk,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\frac{(\overline{M}+\overline{m})}{r^3}yk,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = k^2\frac{(M+m)}{r^3}zk,$$
$$k = 1 - \frac{1}{4}\frac{R^2+\rho^2}{r^2} - \frac{65}{48}\cdot\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{\rho^2}{r^2}. \qquad (19)$$

Plana, en discutant la 45-ième proposition du I livre de Principia, a résolu le problème suivant: un point matériel se meut sous l'action d' une force dirigeé vers un centre fixe en fonction de la distance: la trajectoire qui'il décrit est de telle nature, que l'un des rayons vecteurs maxima est à *très* près égal au rayon vecteur minimum qui le suit. Determiner la limite de l'angle compris entre ces deux raysons vecteurs lorsqu'ils deviennent egaux.

Plana donne la formule suivante:

$$V = \pi\left[\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha) - \alpha\varphi''(\alpha)}\right]^{1/2}, \qquad (20)\ [1]$$

A étant la valeur maximum de

$$z = \frac{1}{r},$$
$$\int Fr^2\,dz = \varphi(z).$$

Ici

$$\varphi'(z) = -k^2\overline{M}(1+\overline{\mu})\left[1 - {}^1/_4(\rho^2+R^2)z^2 - \frac{65}{48}\rho^2R^2z^4\right].$$

$$\varphi'(z) - z\varphi''(z) = -k^2\overline{M}(1+\overline{\mu})\left[1 + \frac{1}{4}(\rho^2+R^4)z + \frac{195}{48}\rho^2R^2z^4\right],$$

$$V = \pi\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{4}(\rho^2+R^2)z^2 - \frac{65}{48}\rho^2R^2z^4}{1 + \frac{1}{4}(\rho^2+R^2)z^2 + \frac{195}{48}\rho^2R^2z^4}}.$$

Pour les valeur petites de $\frac{\rho}{\pi}$, $\frac{R}{r}$ on obtent approximativement:

$$V = \pi\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\rho^2+R^2}{r^2}\right]. \qquad (21)$$

Ainsi le deplacement du perihélie

$$\delta V = \frac{\pi}{2}\frac{\rho^2+R^2}{r^2}, \qquad (22)$$

Si on prend le soleil et la terre, on aura

$$\frac{\rho}{r} = 0{,}000043, \quad \frac{R}{r} = 0.0047,$$

[1]) Juillien. Problèmes. de Mécauique r3tionnelle. Paris B 66 t I p. 322.

$$\frac{R^2 + \rho^2}{r^2} = 0.000022,$$

$$\delta V = 7,\ 13.$$

Si on compare la partie de l'inégalite séculare de la longitude du périhélie de la terre 3″.8 [1]) qui n'était pas expliquée par des forces perturbatrices des planètes avec le deplacement du périhélie $\delta V - 713''$ (séculaire), on doit conclure *que notre monde tridimensional ne doit être inséré dans un monde quadridimensional euclidien gouverné par la loi newtonienne.*

---

[1]) W. de Sitter. On Einsteins Theory of gravitation and its astronomical consequences. Montly Notices, vol. 76, № 9.
Newcomb S. Astronomical constants, p. 109.